



201 / /

التاريخ

الموضوع 5

المتمثلات

لتكن لدينا المتتالية من الأعداد المقيدة  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  فنقول عن هذه المتتالية أنها متقاربة من العدد المقيد  $z$  ونرمز لذلك بالرمز  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  إذا وفقط إذا كان لكل  $\epsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $N$  بحيث أن  $|z_n - z| < \epsilon$  فإن  $n > N$ . هذا يعني أن المتتالية تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت جميع حدود المتتالية ابتداءً من الحد الكبير  $N$  تقع في جوار النقطة  $z$ . وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فنسميها متتالية متباعدة. يمكن إثبات على أن نهاية متتالية متقاربة وحيدة.

مبرهنة: لتكن  $z_n = x_n + i y_n$  وليكن  $z = x + i y$  فإن نهاية

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{إذا وفقط إذا كانت}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

إثبات: لنفرض أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  ولنتبين أن (2) تحققت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

بما أن (1) تحققت هذا يعني استخداماً للتعريف أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب  $\epsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $N$  بحيث أن

$$|z_n - z| < \epsilon \quad \text{طالما أن } n > N \quad \text{أي أنه } |x_n - x + i(y_n - y)| < \epsilon$$

طالما أن  $n > N$  وبإستقادة

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

$$\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x + i(y_n - y)| \leq \epsilon$$

$$|y_n - y| \leq |x_n - x + i(y_n - y)| \leq \epsilon$$

طالما أن  $n > N$  وهذا يعني أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$





201 / /

التاريخ

الموضوع

**المسألة ١:** لنفرض أن (2) تحققت ولنثبت أن (1) تحققت  
عما أن (2) تحققت يعني أنه من أجل كل  $\epsilon > 0$  يوجد  $N_1, N_2$  بحيث أن

$$n > N_1 \text{ فإن } |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$n > N_2 \text{ فإن } |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

لنفرض أن  $N$  هو أكبر العددين  $N_1$  و  $N_2$  عندها وبالنسبة إلى  $N$  ستفاد من المتراجحة

$$|x_n - x + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

طالما أن  $n > N$

وهذا يعني أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  وهو المطلوب

### ملاحظة

من خلال هذه المبرهنة نلاحظ بأن دراسة تقارب أو تباعد المتتاليات في السامية المقصودة يتم ردها إلى دراسة تقارب أو تباعد المتتاليات في السامية الحقيقية.

### المتتاليات

نقول عن التعبير الآتي  $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$

حيث  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  أعداد عقدية بأنه متسلسلة من الأعداد العقدية ونفرض ذلك

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad (1)$$

الشكل الآن متسلسلة الجاميع الجزئية

$$S_0 = z_0$$

$$S_1 = z_0 + z_1$$

$$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$$

$$S_N = z_0 + z_1 + \dots + z_N = \sum_{n=0}^N z_n$$

ندعو المتسلسلة  $S_N$  السابقة متسلسلة الجاميع الجزئية

وإذا كانت نهاية متسلسلة الجاميع الجزئية متقاربة ونهاتها  $S$  أي أنه  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$

فمنه نثبت نقول عن المتسلسلة (1) أنها متسلسلة متقاربة ونجموعها  $S$  أي أن

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

وبما أن نهاية متسلسلة هي نهاية ونهاتها فإن مجموع متسلسلة هو أيضا ونهاتها وإذا لم تكن





201 / /

التاريخ

الموضوع

المسألة المتسلسلة متقاربة ندعوها بالمتسلسلة

مبرهنة

ليكن  $S = X + iY$  و  $Z_n = X_n + iY_n$

عندئذ  $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$  إذاً فقط إذا كان

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$$

فخلال هذه المبرهنة يتم إرجاع دراسة تقارب أو تباعد المتسلسلة في الصورة الحقيقية إلى دراسة تقارب أو تباعد المتسلسلة في الصورة الحقيقية.

ملاحظة

إذا كانت  $S = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$  سلسلة متقاربة ومجموعها  $S$  هذا يعني حسب التعريف

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

لنرمز لجميع حدود المتسلسلة المتقاربة المظلة ابتداءً من الحد  $n$  بالرمز  $R_n(Z)$  أي أن

$$R_n(Z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} Z_j$$

والذي ندعوه متبقية البواقي أي أن

$$|R_n(Z)| = |S_n - S|$$

فخلال هذه العلاقة الأخيرة نستنتج بأن المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} Z_n$  تكون متقاربة إذاً

ومفقط إذا كانت متبقية البواقي تؤول إلى الصفر.

« مبرهنة (شرايبلور) » :

لتكن  $f$  تحليلية في داخلية القوس الدائري  $C$  الذي مركزه النقطة  $z_0$  والذي نصف قطره  $r_0$  عندئذ يكون للدالة  $f$  عند كل نقطة  $z$  تقع في داخلية  $C$  التمثيل الآتي

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad (1) ; |z - z_0| < r_0$$

مبرهنة : هذا التمثيل يسمى شرايبلور للدالة  $f$  في جوار النقطة  $z_0$  حيث  $z_0$  دالة

$f$  تحليلية عند  $z_0$  وعند كل نقطة من نقاط هذا الجوار

من هذه المبرهنة نستنتج بأن

انصف قطر التقارب لمسلسلة شرايبلور يساوي إلى المسافة بين مركز النشر

وأقرب نقطة شاذة للدالة  $f$  عن مركز النشر.

الأمثلة : لتكن  $z_0$  نقطة مأمونة في داخلية  $C$  ولنرمز للمسافة بين  $z_0$  و  $z$

ب  $r$  أي  $r = |z - z_0|$  حيث  $r_0 < r$  ولتكن  $C$  دائرة مركزها  $z_0$  ونصف قطرها  $r_0$



$$1 + c + c^2 + \dots + c^{N-1} = \frac{1-c^N}{1-c}; |c| < 1$$

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \dots + c^{N-1} + \frac{c^N}{1-c}$$



201 / /

التاريخ

الموضوع

حيث أن هذه الدائرة تقع في داخلية قرص الدائرة و  $C$  من داخلية  $C_1$  أي أن  $r < r_0$  ولنفرض للحظة الدائرة  $D$  عند  $z_0$  صيغة تكامل كوشي:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds = f(z)$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

صيغة خاصة يكون:  $s-z_0$

$$= \frac{1}{s-z_0} \left[ 1 + \frac{1}{s-z_0} (z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^2} (z-z_0)^2 + \dots + \frac{1}{(s-z_0)^{N-1}} (z-z_0)^{N-1} + \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N} \right]$$

$$= \frac{1}{s-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^2} (z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^3} (z-z_0)^2 + \dots + \frac{1}{(s-z_0)^N} (z-z_0)^{N-1} + \frac{1}{(s-z_0)^N} \frac{(z-z_0)^N}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$$= \frac{1}{s-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^2} (z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^3} (z-z_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{(s-z_0)^N} (z-z_0)^{N-1} + \frac{1}{(s-z_0)^N} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0) - (z-z_0)}$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بـ  $f(s)$  فنجد أن:

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} (z-z_0) + \frac{f(s)}{(s-z_0)^3} (z-z_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f(s)}{(s-z_0)^N} (z-z_0)^{N-1} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^N} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0) - (z-z_0)}$$

تكامل طرفي المعادلة على الدالة  $C_1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z_0} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z_0} ds (z-z_0)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} ds (z-z_0)^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^N} ds (z-z_0)^{N-1} + R_N(z)$$

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0) - (z-z_0)} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N} ds$$

صيغة

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!} (z-z_0)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} (z-z_0)^{N-1} + R_N(z)$$





التاريخ / / 201

الموضوع

لنثبت بأن  $R_N(z)$  صفره هو الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$  بما أن  $f$  تحليلية على دافني داخلية  $C$  عند  $z_0$  يوجد  $M$  بحيث أن  $|f(z)| \leq M$  و  $|z - z_0| = r$  و  $|z - z_0| = r_1$

$$|(s - z_0) - (z - z_0)| \geq r_1 - r$$

$$\frac{1}{|(s - z_0) - (z - z_0)|} \leq \frac{1}{r_1 - r}$$

اعتماداً على ما سبق يكون

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r_1 - r} \frac{r_1^n}{r^n} (2\pi r_1)$$

$$= \frac{r_1 M}{r_1 - r} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n$$

وبما أن المتتالية  $\left(\frac{r_1}{r}\right)^n$  صفره هو الصفر عندما  $n \rightarrow \infty$  (لأنه  $\frac{r_1}{r} < 1$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_N(z) = 0$$

وبما أن متتالية الموابق  $R_N(z)$  صفره هو الصفر فمتتالية التوى الموجودة في الصرّف الأعلى يكون متقاربة وعندئذ يكون  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

مثال: أوجد متسلسلة تايلور للدالة  $f(z) = \frac{1}{z}$  حول النقطة  $z = z_0$  وبين دقة التقارب

الحل: دقة تقارب المتسلسلة دافني 2

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 +$$

$$\frac{f'''(z_0)}{3!} (z - z_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots ; |z - z_0| < 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f'(z) = -\frac{2}{z^3} \Rightarrow f''(z) = \frac{2}{z^4} = \frac{1}{2}$$

$$f''(z) = -\frac{6}{z^5} \Rightarrow f'''(z) = \frac{6}{z^6} = \frac{1}{8}$$





201 / /

التاريخ

الموضوع

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-2) + \frac{1}{8}(z-2)^2 - \frac{1}{16}(z-2)^3 + \dots + (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} ; |z-2| < 2$$

ملحظة: عندما  $z_0 = 0$  عندها يصبح نشر تايلور نشر ماكلورين:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

وندعو الممتدور في الحالة السابقة بنشر فاكلوران

مثال: أوجد متسلسلة الدالة  $f(z) = e^z$  في صوار  $z = 0$

الحل: نضع قطر التقارب لانهاية أي الشرط في  $|z| < \infty$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots ; |z| < \infty$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

مثال: أوجد متسلسلة الدالة  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$  في صوار النقطة  $z_0 = 1$

لإجابه على هذا السؤال يتم من خلال نشر لوران

برهنة لورانت

لتكن  $f$  دالة تحليلية على النظام الحلقي الواقع بين الدائرتين  $C_1$  و  $C_2$  المقصود بالمركز

والذي مركزها هو النقطة  $z_0$  عندها عند كل نقطة  $z$  من نظام النظام الحلقي

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad \text{يكون للدالة } f \text{ التمثيل الذي}$$

$$r_2 < |z-z_0| < r_1$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz ; n=0,1,2,\dots$$

وصية أن:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz ; n=1,2,\dots$$



$$\frac{1}{1+C} = 1 - C + C^2 - C^3 + \dots + (-1)^n C^n \dots$$

$$\frac{1}{1-C} = 1 + C + C^2 + \dots$$



التاريخ / / 201

الموضوع

**ملاحظة:** لنشتر الابقه بدعاه نشر لورانت للدالة  $f(z)$  ، لنظام الحلقة  
أي في النطاق الواقعة بين دائرتين متحدتي المركز

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

تدعم الجزء العقلي لنشر لورانت

المسألة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$  تدعى الجزء الرئيسي لنشر لورانت

عند صان  $z_0$  على الطالب أن يتوضي الحذر

**ملاحظة:** عندما  $z_0$  ليس هو الصفر يكون النشر السابق صحيح في هذه الحالة نقول  
أن نشر لورانت صحيح في القرص الدائري الموقوف عند مركز النشر

**ملاحظة:** إذا كانت الدالة  $f$  تحليلية في جميع النقاط التي تقع في داخلية المزدائرة  $C$  ،  
وعند جميع النقاط التي تقع في داخلية  $C$  ، وبما فيها عند  $z_0$  يصعب المقادير  $\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$  عبارة عن  
كثيرات ،

$$-n+1 \leq 0$$

صود ذلك لأن

أي أن  $\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$  يصعب دالة تحليلية ومبدأ دالتين تحليليتين هو دالة

تحليلية ونعلم حسب مبرهنة كوشي هورسات للمناطق بسيطة التراب بأن

تكامل دالة تحليلية على كفاف مغلق وبسيط لا يودي الصفر أي أن  $b_n$

وهما أن  $n=1, 2, \dots$  يصعب جميعها أصفار في هذه الحالة يقول نشر لورانت

الابقه إلى نشر تايلور